МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева»

Кафедра математического анализа

<u>РЯДЫ</u>

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика,

направленность (профиль): «Общий профиль: прикладная математика и информатика»

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доцент Лайпанова З.М.

Карачаевск, 2021

Ряды.

Основные определения.

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При этом числа $u_1, u_2, ...$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, ...$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, ..., S_n, ...$

Определение. Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Свойства рядов.

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum Cu_n$, где С – постоянное число.

Теорема. *Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum Cu_n$ тоже сходится, и его сумма равна CS. ($C \neq 0$)*

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$. **Суммой** или **разностью** этих рядов будет называться ряд $\sum(u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

Теорема. *Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд $\sum(u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна $S + \sigma$.*

$$\sum(u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.
Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.
О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

Критерий Коши. (необходимые и достаточные условия сходимости ряда)

Для того, чтобы последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что при $n > N$ и любом $p > 0$, где p – целое число, выполнялось бы неравенство:

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Доказательство. (необходимость)

Пусть $a_n \to a$, тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что неравенство $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполняется при n>N. При n>N и любом целом p>0 выполняется также неравенство $|a - a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Учитывая оба неравенства, получаем: $|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a) + (a - a_n)| \le |a_{n+p} - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Необходимость доказана. Доказательство достаточности рассматривать не будем.

Сформулируем критерий Коши для ряда.

Для того, чтобы ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *был сходящимся необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал номер N такой, что при n>N и любом p>0 выполнялось бы неравенство*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon .$$

Однако, на практике использовать непосредственно критерий Коши не очень удобно. Поэтому, как правило используются более простые признаки сходимости:

1) Если ряд $\sum u_n$ сходится, то необходимо, чтобы общий член u_n стремился к нулю. Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{3n-1} + \ldots$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0$ - необходимый признак сходимости не выполняется, значит ряд расходится.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Однако этот признак также не является достаточным.

Например, ряд 1-1+1-1+1-1+ … $+(-1)^{n+1}+\ldots$ расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при четных } n \\ 1, & \text{при нечетных } n \end{cases}$$

Однако, при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к. $|S_n| < 2$ при любом *n*.

Ряды с неотрицательными членами.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Теорема. *Для сходимости ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.*

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема. Если $u_n \leq v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n частные суммы рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$. Т.к. по условию теоремы ряд $\sum v_n$ сходится, то его частные суммы ограничены, т.е. при всех n $\sigma_n < M$, где M – некоторое число. Но т.к. $u_n \leq v_n$, то $S_n \leq \sigma_n$ то частные суммы ряда $\sum u_n$ тоже ограничены, а этого достаточно для сходимости.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n} + \ldots$

Т.к. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема. *Если $u_n > 0$, $v_n > 0$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.*

Признак Даламбера. (Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q$, то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ – расходится. Если $\rho = 1$, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

$$u_n = \frac{n}{2^n};\quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

$$u_n = \frac{1}{n!};\quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Признак Коши. (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$\sqrt[n]{u_n} \le q$, то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

<u>Следствие.</u> Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при ρ<1 ряд сходится, а при ρ>1 ряд расходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e \ne 0$, таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

<u>Интегральный признак Коши.</u>

Если φ(x) – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке [1;∞), то ряд φ(1) + φ(2) + ...+ φ(n) + ... = $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}\varphi(x)dx$ одинаковы в смысле сходимости.

Пример. Ряд $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}+...$ сходится при α>1 и расходится α≤1 т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при α>1 и расходится α≤1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ называется **общегармоническим** рядом.

Следствие. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=h, \quad h\neq 0,$ то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Знакопеременные ряды.

Знакочередующиеся ряды.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}u_n+...$

где $u_n>0, \quad n=1,2,3,...$

Признак Лейбница.

Если у знакочередующегося ряда $u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}u_n+...$ *абсолютные величины* u_i *убывают* $u_1>u_2>u_3>...$ *и общий член стремится к нулю* $u_n\to 0$, *то ряд сходится.*

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1|+|u_2|+...+|u_n|+...=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \qquad (2)$$

Теорема. *Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

Доказательство. Ряд (2) является рядом с неотрицательными членами. Если ряд (2) сходится, то по критерию Коши для любого ε>0 существует число N, такое, что при n>N и любом целом p>0 верно неравенство:

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

По свойству абсолютных величин:

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|\le|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

То есть по критерию Коши из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum|u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся,** если он сходится, а ряд $\sum|u_n|$ расходится.

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема.** *Для абсолютной сходимости ряда $\sum u_n$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.*

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.*

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i, k = 1,2,...$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Функциональные последовательности.

Определение. Если членами ряда будут не числа, а функции от x, то ряд называется **функциональным**.

Исследование на сходимость функциональных рядов сложнее исследования числовых рядов. Один и тот же функциональный ряд может при одних значениях переменной x сходиться, а при других – расходиться. Поэтому вопрос сходимости функциональных рядов сводится к определению тех значений переменной x, при которых ряд сходится.

Совокупность таких значений называется **областью сходимости**.

Так как пределом каждой функции, входящей в область сходимости ряда, является некоторое число, то пределом функциональной последовательности будет являться некоторая функция:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ **сходится** к функции $f(x)$ на отрезке [a,b], если для любого числа ε>0 и любой точки x из рассматриваемого отрезка существует номер N = N(ε, x), такой, что неравенство

$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ выполняется при n>N.

При выбранном значении ε>0 каждой точке отрезка [a,b] соответствует свой номер и, следовательно, номеров, соответствующих всем точкам отрезка [a,b], будет бесчисленное множество. Если выбрать из всех этих номеров наибольший, то этот номер будет годиться для всех точек отрезка [a,b], т.е. будет общим для всех точек.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ **равномерно сходится** к функции $f(x)$ на отрезке [a,b], если для любого числа ε>0 существует номер N = N(ε), такой, что неравенство

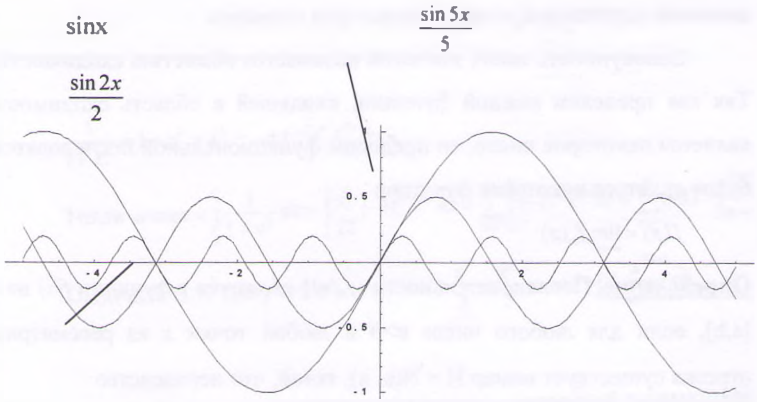
$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

выполняется при n>N для всех точек отрезка [a,b].

Пример. Рассмотрим последовательность $\frac{\sin x}{1}, \frac{\sin 2x}{2}, \ldots, \frac{\sin nx}{n}, \ldots$

Данная последовательность сходится на всей числовой оси к функции $f(x)=0$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin nx}{n}=0, \quad -\infty<x<\infty$

Построим графики этой последовательности:



Как видно, при увеличении числа n график последовательности приближается к оси x.

<u>Функциональные ряды.</u>

<u>**Определение.**</u> **Частными (частичными) суммами** функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n=1,2,\ldots$

<u>**Определение.**</u> Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **сходящимся** в точке ($x=x_0$), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется **суммой** ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0.

<u>**Определение.**</u> Совокупность всех значений x, для которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке [a,b], если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

Теорема. (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого числа ε>0 существовал такой номер N(ε), что при n>N и любом целом p>0 неравенство*

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

выполнялось бы для всех x на отрезке [a,b].

Теорема. (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса)

(Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897) – немецкий математик)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке [a,b], если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами :*

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$$

т.е. имеет место неравенство:

$$|u_n(x)| \le M_n.$$

Еще говорят, что в этом случае функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **мажорируется** числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{M}_n$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

Так как $|\cos nx| \le 1$ всегда, то очевидно, что $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$.

При этом известно, что общегармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при α=3>1 сходится, то в соответствии с признаком Вейерштрасса исследуемый ряд равномерно сходится и притом в любом интервале.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$.

На отрезке [-1,1] выполняется неравенство $\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ т.е. по признаку Вейерштрасса на этом отрезке исследуемый ряд сходится, а на интервалах (-∝, -1) ∪ (1, ∝) расходится.

Свойства равномерно сходящихся рядов.

1) Теорема о непрерывности суммы ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *- непрерывные на отрезке [a,b] функции и ряд сходится равномерно, то и его сумма S(x) есть непрерывная функция на отрезке [a,b].*

2) Теорема о почленном интегрировании ряда.

Равномерно сходящийся на отрезке [a,b] ряд с непрерывными членами можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е. ряд, составленный из интегралов от его членов по отрезку [a,b] , сходится к интегралу от суммы ряда по этому отрезку.

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}u_n(x)dx; \quad \alpha,\beta \in [a,b]$$

3) Теорема о почленном дифференцировании ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *сходящегося на отрезке [a,b] представляют собой непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, и ряд,* *составленный из этих производных* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *сходится на этом отрезке равномерно, то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно.*

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}$$

На основе того, что сумма ряда является некоторой функцией от переменной *x*, можно производить операцию представления какой – либо функции в виде ряда (разложения функции в ряд), что имеет широкое применение при интегрировании, дифференцировании и других действиях с функциями.

На практике часто применяется разложение функций в степенной ряд.

<u>Степенные ряды.</u>

<u>**Определение.**</u> **Степенным рядом** называется ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n .$$

Для исследования на сходимость степенных рядов удобно использовать признак Даламбера.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$

Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right| = |x|.$$

Получаем, что этот ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

Теперь определим сходимость в граничных точках 1 и –1.

При x = -1: $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-...$ ряд сходится по признаку Лейбница (см. Признак Лейбница.).

При x = 1: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ ряд расходится (гармонический ряд).

Теоремы Абеля.

(Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик)

Теорема. *Если степенной ряд* $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *сходится при* $x = x_1$, *то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x|<|x_1|$.

Доказательство. По условию теоремы, так как члены ряда ограничены, то

$$|a_nx_1^n|\le k,$$

где *k*- некоторое постоянное число. Справедливо следующее неравенство:

$$|a_nx^n|=|a_nx_1^n|\left|\frac{x}{x_1}\right|^n\le k\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

Из этого неравенства видно, что при $x<x_1$ численные величины членов нашего ряда будут меньше (во всяком случае не больше) соответствующих членов ряда правой части записанного выше неравенства, которые образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель этой прогрессии $\left|\frac{x}{x_1}\right|$ по условию теоремы меньше единицы, следовательно, эта прогрессия представляет собой сходящийся ряд.

Поэтому на основании признака сравнения делаем вывод, что ряд $\sum|a_nx^n|$ сходится, а значит ряд $\sum a_nx^n$ сходится абсолютно.

Таким образом, если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится в точке x_1, то он абсолютно сходится в любой точке интервала длины $2|x_1|$ с центром в точке $x = 0$.

Следствие. Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится. При этом число R называется **радиусом сходимости**. Интервал (-R, R) называется **интервалом сходимости**.

Отметим, что этот интервал может быть как замкнутым с одной или двух сторон, так и не замкнутым.

Радиус сходимости может быть найден по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$$

Пример. Найти область сходимости ряда $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Находим радиус сходимости $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n-1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}|n| = |\infty|$.

Следовательно, данный ряд сходится при любом значении x. Общий член этого ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0.$$

Теорема. Если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится для положительного значения $x=x_1$, то он сходится равномерно в любом промежутке внутри $(-|x_1|; |x_1|)$.

Действия со степенными рядами.

1) Интегрирование степенных рядов.

Если некоторая функция *f(x)* определяется степенным рядом: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, то интеграл от этой функции можно записать в виде ряда:

$$\int f(x)dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+C$$

2) Дифференцирование степенных рядов.

Производная функции, которая определяется степенным рядом, находится по формуле:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(a_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}$$

3) Сложение, вычитание, умножение и деление степенных рядов.

Сложение и вычитание степенных рядов сводится к соответствующим операциям с их членами:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$$

Произведение двух степенных рядов выражается формулой:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

Коэффициенты c_i находятся по формуле:

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_0$$

Деление двух степенных рядов выражается формулой:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n}=\sum_{n=0}^{\infty}q_n x^n$$

Для определения коэффициентов q_n рассматриваем произведение $\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, полученное из записанного выше равенства и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 = q_0 b_0 \\ a_1 = q_0 b_1 + q_1 b_0 \\ a_2 = q_0 b_2 + q_1 b_1 + q_2 b_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = q_0 b_n + q_1 b_{n-1} + \dots + q_n b_0 \end{cases}$$

Разложение функций в степенные ряды.

Разложение функций в степенной ряд имеет большое значение для решения различных задач исследования функций, дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений, вычисления пределов, вычисления приближенных значений функции.

Возможны различные способы разложения функции в степенной ряд. Такие способы как разложение при помощи рядов Тейлора и Маклорена были рассмотрены ранее. (См. Формула Тейлора.)

Существует также способ разложения в степенной ряд **при помощи алгебраического деления.** Это – самый простой способ разложения, однако, пригоден он только для разложения в ряд алгебраических дробей.

Пример. Разложить в ряд функцию $\frac{1}{1-x}$.

Суть метода алгебраического деления состоит в применении общего правила деления многочленов:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1 - x \\ \hline
1 - x & 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \\
\quad x & \\
\quad x - x^2 & \\
\qquad x^2 & \\
\qquad x^2 - x^3 & \\
\qquad\quad x^3 & \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Если применить к той же функции формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

то получаем: $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad f'(0) = 1;$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}; \quad f''(0) = 2;$$

$$f'''(x) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}; \quad f'''(0) = 3!;$$

…………………………………

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}; \quad f^{(n)}(0) = n!;$$

Итого, получаем: $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

Рассмотрим способ разложения функции в ряд **при помощи интегрирования.**

С помощью интегрирования можно разлагать в ряд такую функцию, для которой известно или может быть легко найдено разложение в ряд ее производной.

Находим дифференциал функции $df(x) = f'(x)dx$ и интегрируем его в пределах от 0 до x.

$$\int_0^x df(x) = \int_0^x f'(x)dx; \qquad f(x)\Big|_0^x = \int_0^x f'(x)dx;$$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)dx;$$

Пример. Разложить в ряд функцию $f(x) = \ln(1+x)$.

Разложение в ряд этой функции по формуле Маклорена было рассмотрено выше.

(См. Функция у = ln(1 + x).) Теперь решим эту задачу при помощи интегрирования.

При $f(0) = 0, \quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ получаем по приведенной выше формуле:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x}dx$$

Разложение в ряд функции $\dfrac{1}{1+x}$ может быть легко найдено способом алгебраического деления аналогично рассмотренному выше примеру.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

Тогда получаем:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x}dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Окончательно получим: $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$

Пример. Разложить в степенной ряд функцию $arctgx$.

Применим разложение в ряд с помощью интегрирования.

$$f(x) = arctgx; \quad f(0) = 0; \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2};$$

$$arctgx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx$$

Подинтегральная функция может быть разложена в ряд методом алгебраического деления:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;1 & 1+x^2 \\ \hline
1+x^2 & 1-x^2+x^4-\dots \\
-\;-x^2 & \\
-x^2-x^4 & \\ \hline
-\;x^4 & \\
x^4+x^6 & \\ \hline
\dots\dots\dots\dots &
\end{array}
$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots$$

Тогда $arctgx=\int\limits_0^x \frac{1}{1+x^2}dx=\int\limits_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x(-1)^n x^{2n}dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Окончательно получаем: $arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$

Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

С помощью степенных рядов возможно интегрировать дифференциальные уравнения.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=f(x)$$

Если все коэффициенты и правая часть этого уравнения разлагаются в сходящиеся в некотором интервале степенные ряды, то существует решение этого уравнения в некоторой малой окрестности нулевой точки, удовлетворяющее начальным условиям.

Это решение можно представить степенным рядом:

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$$

Для нахождения решения остается определить неизвестные постоянные c_i.

Эта задача решается **методом сравнения неопределенных коэффициентов**. Записанное выражение для искомой функции подставляем в исходное дифференциальное уравнение, выполняя при этом все необходимые действия со степенными рядами (дифференцирование, сложение, вычитание, умножение и пр.)

Затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения. В результате с учетом начальных условий получим систему уравнений, из которой последовательно определяем коэффициенты c_i.

Отметим, что этот метод применим и к нелинейным дифференциальным уравнениям.

Пример. Найти решение уравнения $y'' - xy = 0$ с начальными условиями $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Решение уравнения будем искать в виде $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \dots$$

Подставляем полученные выражения в исходное уравнение:

$$(2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \dots) - (c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + \dots) = 0$$

$$2c_2 + x(6c_3 - c_0) + x^2(12c_4 - c_1) + x^3(20c_5 - c_2) + x^4(30c_6 - c_3) + \dots = 0$$

Отсюда получаем: $2c_2 = 0$

$$6c_3 - c_0 = 0$$
$$12c_4 - c_1 = 0$$
$$20c_5 - c_2 = 0$$
$$30c_6 - c_3 = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Получаем, подставив начальные условия в выражения для искомой функции и ее первой производной:

$$c_0 = 1$$
$$c_1 = 0$$

Окончательно получим: $c_0 = 1;\quad c_1 = 0;\quad c_2 = 0;\quad c_3 = \frac{1}{6};\quad c_4 = 0;\quad c_5 = 0;$ $c_6 = \frac{1}{180};\quad \ldots$

Итого: $y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \ldots$

Существует и другой метод решения дифференциальных уравнений с помощью рядов. Он носит название **метод последовательного дифференцирования.**

Рассмотрим тот же пример. Решение дифференциального уравнения будем искать в виде разложения неизвестной функции в ряд Маклорена.

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Если заданные начальные условия *y(0)=1, y'(0)=0* подставить в исходное дифференциальное уравнение, получим, что $y''(0) = 0$.

Далее запишем дифференциальное уравнение в виде $y'' = xy$ и будем последовательно дифференцировать его по x.

$$y''' = y + xy';\qquad y'''(0) = y(0) = 1;$$
$$y^{IV} = y' + y' + xy'';\quad y^{IV}(0) = 0;$$
$$y^{V} = 2y'' + y'' + xy''';\quad y^{V}(0) = 0;$$
$$y^{VI} = 3y''' + y''' + xy^{IV};\quad y^{VI}(0) = 4;$$
....

После подстановки полученных значений получаем:

$$y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \ldots$$

Ряды Фурье.

(Жан Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830) – французский математик)

Тригонометрический ряд.

Определение. Тригонометрическим рядом называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \ldots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx) + \ldots$$

или, короче, $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

Действительные числа a_i, b_i называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если ряд представленного выше типа сходится, то его сумма представляет собой периодическую функцию с периодом 2π, т.к. функции sin*nx* и cos*nx* также периодические функции с периодом 2π.

Пусть тригонометрический ряд равномерно сходится на отрезке [-π; π], а следовательно, и на любом отрезке в силу периодичности, и его сумма равна *f(x)*.

Определим коэффициенты этого ряда.

Для решения этой задачи воспользуемся следующими равенствами:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\quad m=0,1,2,\ldots\\ \pi, & m=n,\quad m,n=1,2,\ldots\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n,\quad m,n=1,2,\ldots\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx dx=0,\quad m=0,1,2,\ldots,\quad n=1,2,\ldots$$

Справедливость этих равенств вытекает из применения к подынтегральному выражению тригонометрических формул. Подробнее см. <u>Интегрирование тригонометрических функций.</u>

Т.к. функция *f(x)* непрерывна на отрезке [-π; π], то существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx=\pi a_0$$

Такой результат получается в результате того, что $\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx=0$.

Получаем: $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

Далее умножаем выражение разложения функции в ряд на cosnx и интегрируем в пределах от -π до π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos^2 nx + b_n \cos nx \sin nx)dx = \pi a_n$$

Отсюда получаем: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 1,2,...$

Аналогично умножаем выражение разложения функции в ряд на sinnx и интегрируем в пределах от -π до π.

Получаем: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,...$

Выражение для коэффициента a_0 является частным случаем для выражения коэффициентов a_n.

Таким образом, если функция $f(x)$ – любая периодическая функция периода 2π, непрерывная на отрезке [-π; π] или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,...$$

существуют и называются **коэффициентами Фурье** для функции $f(x)$.

Определение. **Рядом Фурье** для функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье. Если ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье.

Достаточные признаки разложимости в ряд Фурье.

Теорема. (Теорема Дирихле) *Если функция f(x) имеет период 2π и на отрезке [-π; π] непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода, и отрезок [-π; π] можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция f(x) монотонна, то ряд Фурье для функции f(x)* *сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности функции f(x) его сумма равна f(x), а в точках разрыва его сумма равна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$*, т.е. среднему арифметическому предельных значений слева и справа. При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).*

Функция f(x), для которой выполняются условия теоремы Дирихле называется **кусочно – монотонной** на отрезке [-π;π].

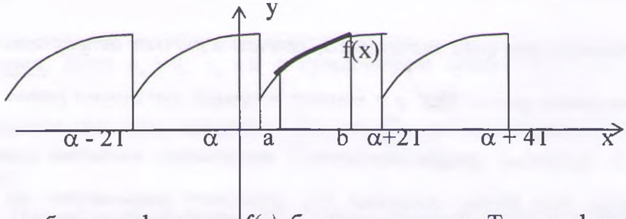
<u>Теорема.</u> *Если функция f(x) имеет период 2π, кроме того, f(x) и ее производная f'(x) – непрерывные функции на отрезке [-π; π] или имеют конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке, то ряд Фурье функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности его сумма равна f(x), а в точках разрыва она равна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$*. При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).*

Функция, удовлетворяющая условиям этой теоремы, называется **кусочно – гладкой** на отрезке [-π;π].

<u>Разложение в ряд Фурье непериодической функции.</u>

Задача разложения непериодической функции в ряд Фурье в принципе не отличается от разложения в ряд Фурье периодической функции.

Допустим, функция *f(x)* задана на отрезке [a, b] и является на этом отрезке кусочно – монотонной. Рассмотрим произвольную периодическую кусочно – монотонную функцию $f_1(x)$ с периодом $2T \geq |b-a|$, совпадающую с функцией f(x) на отрезке [a, b].



Таким образом, функция *f(x)* была дополнена. Теперь функция $f_1(x)$ разлагается в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка [a, b] совпадает с функцией *f(x),* т.е. можно считать, что функция *f(x)* разложена в ряд Фурье на отрезке [a, b].

Таким образом, если функция f(x) задана на отрезке, равном 2π ничем не отличается от разложения в ряд периодической функции. Если же отрезок, на котором задана функция, меньше, чем 2π, то функция продолжается на интервал (b, a + 2π) так, что условия разложимости в ряд Фурье сохранялись.

Вообще говоря, в этом случае продолжение заданной функции на отрезок (интервал) длиной 2π может быть произведено бесконечным количеством способов, поэтому суммы получившихся рядов будут различны, но они будут совпадать с заданной функцией f(x) на отрезке [a,b].

<u>Ряд Фурье для четных и нечетных функций.</u>

Отметим следующие свойства четных и нечетных функций:

1) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x) - \textit{нечетная} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x) - \textit{четная} \end{cases}$$

2) Произведение двух четных и нечетных функций является четной функцией.

3) Произведение четной и нечетной функций – нечетная функция.

Справедливость этих свойств может быть легко доказана исходя из определения четности и нечетности функций.

Если f(x) – четная периодическая функция с периодом 2π, удовлетворяющая условиям разложимости в ряд Фурье, то можно записать:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0; \qquad (n = 1,2,...)$$

Таким образом, для четной функции ряд Фурье записывается:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,...)$$

Аналогично получаем разложение в ряд Фурье для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx; \qquad (n = 1,2,...)$$

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x^3$ с периодом T = 2π на отрезке [-π;π].

Заданная функция является нечетной, следовательно, коэффициенты Фурье ищем в виде:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx; \qquad (n = 1,2,...)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^3 \sin nx dx = \left\{\begin{array}{l} u = x^3; \quad dv = \sin nx dx; \\ du = 3x^2 dx; \quad v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{array}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^3 \cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \right) =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \cos nx dx; \\ du = 2x dx; \quad v = \dfrac{\sin nx}{n}; \end{array}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} + \frac{3}{n}\left[\frac{x^2 \sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2x \sin nx}{n} dx \right]\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = \left\{\begin{array}{l} u = x; \quad dv = \sin nx dx; \\ du = dx; \quad v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{array}\right\} =$$

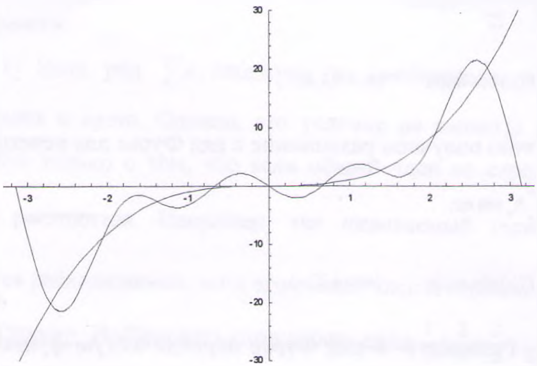
$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\left(-\frac{x \cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} + \frac{6\pi \cos \pi}{n^3} - \frac{6}{n^3}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} \right)\right) = -\frac{2\pi^2 \cos \pi n}{n} + \frac{12 \cos \pi n}{n^3} = (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right)$$

Получаем:

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx .$$

Построим графики заданной функции и ее разложения в ряд Фурье, ограничившись первыми четырьмя членами ряда.



Ряды Фурье для функций любого периода.

Ряд Фурье для функции *f(x)* периода $T = 2l$, непрерывной или имеющей конечное число точек разрыва первого рода на отрезке $[-l, l]$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos \frac{\pi n}{l} xdx, \quad n = 1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin \frac{\pi n}{l} xdx, \quad n = 1,2,...$$

Для четной функции произвольного периода разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{l}x;$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx; \quad n = 1,2,...$$

Для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x;$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx; \quad n = 1,2,...$$

Ряд Фурье по ортогональной системе функций.

Определение. Функции φ(x) и ψ(x), определенные на отрезке [a, b], называются **ортогональными** на этом отрезке, если

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0$$

Определение. Последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi n(x)$, непрерывных на отрезке [a, b], называется **ортогональной системой функций** на этом отрезке, если все функции попарно ортогональны.

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0; \qquad i \neq j$$

Отметим, что ортогональность функций не подразумевает перпендикулярности графиков этих функций.

Определение. Система функций называется **ортогональной и нормированной (ортонормированной)**, если

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Определение. **Рядом Фурье по ортогональной системе функций** $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi n(x)$ называется ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

коэффициенты которого определяются по формуле:

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx},$$

где $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ - сумма равномерно сходящегося на отрезке [a, b] ряда по ортогональной системе функций. $f(x)$ – любая функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на отрезке [a, b].

В случае ортонормированной системы функций коэффициенты определяются:

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$$

ТЕМА 10. Ряды.

1. Числовые ряды.
2. Функциональные ряды.
3. Степенные ряды.
4. Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям.
5. Ряды Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб.для вузов:в 3т.-5-е изд.,стер.-М.:Дрофа .- (Высшее образование. Современный учебник).т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление.-2003.-509 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс. Т.1. -2001.- 415 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учеб. для вузов: в 3-х томах. – 8-е изд.-М.: Физматлит. т.1 – 2001. -697 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. - 22-е изд., перераб.- СПб: Профессия, 2003.-432 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов: В 3-х томах. – 5-е изд., перераб. и доп. –М.: Дрофа. Т.1. – 2003.-703 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов в 2-х частях. – 6-е изд. стер. –М. Физматлит, 2002, -646 с.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд..-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.

Решение типового варианта контрольной работы.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-4n+3}{100n^2+1}\right)^2$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n+5}{3^n\cdot(n+1)}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n\cdot(2n+3)}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{15n^2+6n+4}{3n+2+12n^2}\right)^n$.

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}$.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{15n^2+6n+4}{3n+2+12n^2}\right)^n$.

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln^2 n}$.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt[3]{n^7}+n}$.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right)$

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3}+5}$.

Решение.

а) В данном случае $a_n=\left(\dfrac{n^2-4n+3}{100n^2+1}\right)^2$.

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-4n+3}{100n^2+1}\right)^2=\left(\dfrac{1}{100}\right)^2\neq 0.$

Следовательно, ряд расходится.

б) Поскольку в записи общего члена ряда есть показательная функция 3^n, то используем признак Даламбера.

Для рассматриваемого ряда

$$a_n=\frac{n^2-4n+5}{3^n\cdot(n+1)};\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^2-4(n+1)+5}{3^{n+1}\cdot((n+1)+1)}.$$

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-4(n+1)+5}{3^{n+1}\cdot((n+1)+1)}:\frac{n^2-4n+5}{3^n\cdot((n+1)+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-4(n+1)+5}{n^2-4n+5}\cdot\frac{3^n\cdot(n-1)}{3^{n+1}\cdot((n+1)+1)}=\frac{1}{3}<1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера, исходный ряд сходится.

в) Так как в записи общего члена ряда есть факториал ($n!$), то используем признак Даламбера. Для исследуемого ряда

$$a_n=\frac{n!}{5^n\cdot(2n+3)};\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{5^{n+1}\cdot(2(n+1)+3)}.$$

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{5^{n+1}\cdot(2(n+1)+3)}:\frac{n!}{5^n\cdot(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{5^n}{5^{n+1}}\cdot\frac{2n+3}{(2(n+1)+3)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!\cdot 5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{5}=\infty.$$

В пределе получили бесконечность, следовательно, исследуемый ряд расходится.

г) Воспользуемся радикальным признаком Коши. Здесь $a_n = \left(\frac{15n^2+6n+4}{3n+2+12n^2}\right)^n$.

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{15n^2+6n+4}{3n+2+12n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{15n^2+6n+4}{3n+2+12n^2}\right) = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} > 1.$$

Полученное значение больше 1, следовательно, ряд расходится.

д) Исследуем данный ряд с помощью интегрального признака Коши. Составим соответствующий интеграл и вычислим его

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\cdot\ln^2 x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\cdot\ln^2 x}dx = \left|\begin{array}{c} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}dx \\ x=2\Rightarrow t=\ln 2 \\ x=b\Rightarrow t=\ln b\end{array}\right| = \lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{t^2}dt = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\bigg|_{\ln 2}^{\ln b}\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Интеграл сходится, следовательно, исследуемый ряд сходится.

е) Составим ряд, эквивалентный исходному, оставив в числителе и знаменателе лишь старшие степени n:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n}+3}{2\sqrt[3]{n^7}+n} \sim \sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^7}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{n^{1/2}}{n^{7/3}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{7/3-1/2}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{11/6}}$$

Полученный ряд эквивалентен исходному, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+3}{2\sqrt[3]{n^7}+n} : \frac{1}{n^{11/6}} = \frac{1}{2} \neq 0, \neq \infty$$

Таким образом, исходный ряд и ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{11/6}}$ сходятся и расходятся одновременно. Т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{11/6}}$ $\left(\frac{11}{6}>1\right)$ сходится, следовательно, исходный ряд также сходится.

ж) Так как $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$, то

$$\sum_{n=1}^\infty \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right) \sim \sum_{n=1}^\infty \sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{n^{1/2}}{n^{4/3}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{5/6}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}$ расходится $\left(\frac{5}{6}<1\right)$, следовательно, исходный ряд также расходится.

з) Оценим общий член ряда:

$$0<\sin^2 n<1 \quad \Rightarrow \quad 0<\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3+5}}<\frac{1}{\sqrt{n^3+5}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+5}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится $\left(\frac{3}{2}>1\right)$, следовательно, эквивалентный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+5}}$ также сходится. Т.к. из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего, то исходный ряд сходится.

Пример2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot 3^n}{(x-2)^n n^3}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cdot 3^{n+1}}{|x-2|^{n+1}\cdot(n+1)^3} : \frac{(n+1)\cdot 3^n}{|x-2|^n\cdot n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cdot 3^{n+1}\cdot|x-2|^n\cdot n^3}{(n+1)3^n\cdot|x-2|^{n+1}\cdot(n+1)^3} = \frac{3}{|x-2|}.$$

Ряд сходится, если $\frac{3}{|x-2|}<1 \Rightarrow |x-2|>3$

$x-2>3$ или $x-2<-3$;
$x>5$ или $x<-1$,
$x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.

Ряд расходится, если $\frac{3}{|x-2|}>1 \Rightarrow x\in(-1;5)$.

Неопределенный случай: $\frac{3}{|x-2|}=1$, т.е. $x=5$ или $x=-1$,

Пусть $x=5$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)3^n}{3^n n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{n^3}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - сходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{n^3}$ сходится как эквивалентный сходящемуся ряду.

Пусть $x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)3^n}{(-3)^n n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n^3}$.

Этот ряд – знакочередующийся. Исследуя его на абсолютную сходимость (рассматриваем ряд, состоящий из абсолютных величин), получим ряд как и при $x=5$, а он сходится. Т.к. ряд, состоящий из абсолютных величин, сходится, то данный ряд сходится абсолютно.

Получили, что $(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$ - область сходимости ряда.

Пример 3. Вычислить с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ интеграл $\int\limits_0^1 x \cdot \sin\sqrt{x}dx$.

Решение. Запишем разложение функции $y = x \cdot \sin\sqrt{x}$ в ряд Маклорена:

$$\sin\sqrt{x} = \left|t = \sqrt{x}\right| = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} - \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots =$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{1!} - \frac{\sqrt{x^3}}{3!} + \frac{\sqrt{x^5}}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n-1}{2}}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$x\sin\sqrt{x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n-1}{2}+1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^1 x \cdot \sin\sqrt{x}dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n-1)!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{3! \cdot \frac{7}{2}} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{5! \cdot \frac{9}{2}} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n+1}{2}+1}}{(2n-1)! \cdot \left(\frac{2n+1}{2}+1\right)} + \ldots \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6 \cdot \frac{7}{2}} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2}} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{11}{2}} - \ldots =$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{1}{21} + \frac{1}{540} - \frac{1}{27720} - \ldots \approx \frac{2}{5} - \frac{1}{21} + \frac{1}{540}\left(\pm 10^{-3}\right) =$$

$$= \frac{1512 - 180 + 7}{3780} = \frac{1339}{3780} = 0{,}354\left(\pm 10^{-3}\right).$$

Заметим, что при вычислении интеграла получаем знакочередующийся ряд. Мы отбрасываем при вычислении все слагаемые, начиная со слагаемого, меньшего по абсолютной величине заданной точности $\left(\frac{1}{27720} < 10^{-3}\right)$.

Пример 4. Найти три первые (отличные от 0) члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши $y' - e^{-x}y = 2x, \quad y(0) = 1$.

Решение.

Для представления решения в виде ряда Маклорена необходимо найти первые три отличные от нуля значения $y(0), \quad y'(0), \quad y''(0), \ldots$ По условию задачи $y(0) = 1$.

Выразим из уравнения y':

$$y' = e^{-x}y + 2x; \qquad (*)$$

$$y'(0) = e^{-0} \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1.$$

Найдем y'', продифференцировав обе части равенства $(*)$ по x:

$$y'' = (e^{-x}y + 2x)' = -e^{-x}y + e^{-x}y' + 2;$$

$$y''(0) = -e^{-0} \cdot 1 + e^{-0} \cdot 1 + 2 = 2.$$

Окончательно получим:

$$y = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{2}{2!}x^2 = 1 + x + x^2.$$

Пример 5. Разложить данную функцию в ряд Фурье

а) $f(x)=\begin{cases}1\ ;\ -2<x\le 0\\ x\ ;\ 0<x<2\end{cases}$ в интервале (-2, 2):

б) $f(x)=\begin{cases}x\ ;\ \ 0\le x\le \pi/2\\ \pi-x\ ;\ \pi/2\le x\le \pi\end{cases}$ по синусам на интервале $[0,\ \pi]$.

Решение.

Разложение периодической (период $2l$) функции имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\frac{\pi x}{l}+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin k\frac{\pi x}{l};$$

а) В нашем примере l=2.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\frac{\pi x}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin k\frac{\pi x}{2}; \qquad (**)$$

где $a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx;\ a_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cdot\cos k\frac{\pi x}{2}dx;$

$b_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin k\frac{\pi x}{2}\,dx$

$a_0=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0}1dx+\int\limits_{0}^{2}xdx\right)=\frac{1}{2}\left(x\Big|_{-2}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2}\right)=\frac{1}{2}(2+2)=2$

$a_k=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0}\cos\frac{k\pi}{2}xdx+\int\limits_{0}^{2}x\cdot\cos\frac{k\pi}{2}xdx\right)$

Вычислим значения интегралов-слагаемых по отдельности.

$\int\limits_{-2}^{0}\cos\frac{k\pi x}{2}dx=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}=0;$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int\limits_{0}^{2}x\cdot\cos\frac{k\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix}V=x; \quad V'=1\\ U'=\cos\frac{k\pi x}{2};U=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{k\pi}x\cdot\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}-\int\limits_{0}^{2}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}dx=$$

$$=\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}=\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2(\cos k\pi-\cos 0)=\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\left((-1)^k-1\right).$$

$$a_k=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2((-1)^k-1)=\frac{2}{(k\pi)^2}((-1)^k-1).$$

$$b_k=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0}\sin\frac{k\pi x}{2}dx+\int\limits_{0}^{2}x\cdot\sin\frac{k\pi}{2}xdx\right)$$

Вычислим значения интегралов-слагаемых по отдельности.

$$\int\limits_{-2}^{0}\sin\frac{k\pi}{2}xdx=\frac{-2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x\Big|_{-2}^{0}=\frac{-2}{k\pi}(\cos 0-\cos(-k\pi))=-\frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)$$

Аналогично предыдущему

$$\int_0^2 x\sin\frac{k\pi}{2}x\,dx = \begin{vmatrix} V = x; & V' = 1 \\ U' = \sin\frac{k\pi}{2}x; & U = \frac{-2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}x\cos\frac{k\pi}{2}x\Big|_0^2 - \int_0^2 -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x\,dx = -\frac{2}{k\pi}(2\cdot\cos k\pi - 0) +$$

$$+\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\sin\frac{k\pi}{2}x\Big|_0^2 = -\frac{4\cdot(-1)^k}{k\pi}$$

и окончательно получим:

$$b_k = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{k\pi} + \frac{2}{k\pi}(-1)^k - \frac{4}{k\pi}(-1)^k\right) = -\frac{1}{k\pi} - \frac{(-1)^k}{k\pi}$$

Подставляя полученные значения a_0, a_k, b_k в разложение $(**)$, получим:

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k\pi} - \frac{(-1)^k}{k\pi}\right)\sin\frac{k\pi x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k\pi)^2}\left((-1)^k - 1\right)\cos\frac{k\pi x}{2} =$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{-2}{2m\pi}\sin\frac{2m\pi x}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)\pi)^2}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2}$$

б) Продолжим функцию на отрезок $[-\pi,\ 0]$ нечетным образом (рис. 1).

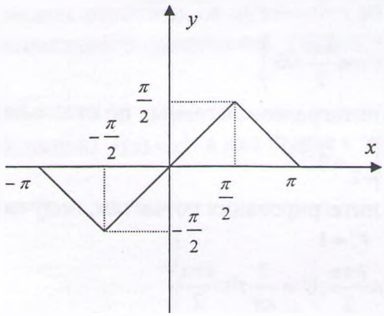


Рис. 1

Тогда получим нечетную функцию, ряд Фурье которой содержит только синусы, т.е. $a_0 = a_k = 0$.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx;$$

Найдем коэффициенты b_k, используя формулу:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin kx\,dx$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}x\cdot\sin kx\ dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\cdot\sin kx\ xdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}x\cdot\sin kx\ dx+\frac{2}{\pi}\cdot\pi\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\sin kx\ dx\right)-\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}x\cdot\sin kx\ xdx=$$

Для вычисления первого и третьего интегралов используем метод интегрирования по частям:

$$=\begin{vmatrix}V=x; & V'=1\\ U'=\sin kx; & U=-\frac{1}{k}\cos kx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cdot\cos kx}{k}\Bigg|_0^{\pi/2}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\cos kx\ dx\right)+2\left(-\frac{\cos kx}{k}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}\right)-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cdot\cos kx}{k}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos kx\ dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cdot\cos\frac{\pi k}{2}}{2k}+\frac{\sin kx}{k^2}\Bigg|_0^{\pi/2}\right)+2\left(-\frac{\cos k\pi}{k}+\frac{\cos\frac{\pi k}{2}}{k}\right)-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cdot\cos k\pi}{k}+\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi k}{2}}{k}+\frac{\sin kx}{k^2}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{4\sin\frac{\pi\cdot k}{2}}{\pi\cdot k^2}=\begin{cases}0, & k=2n\\ \frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{\pi\cdot(2n-1)^2}, & k=2n-1\end{cases}.$$

Таким образом, $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

Контрольная работа №10.
Вариант 1.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n^2}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n^2}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5+3n+6}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n+5}{3^n\cdot(n+1)}\cdot(3x-1)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 \cos\sqrt[3]{x}\,dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y'+2y^2=e^x,\ \ y(0)=0$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x)=\pi-|x|$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 2.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{3^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n-1}\right)^{n-1}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{5}{\sqrt{n^3}}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^7+4n^2+5}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n(x-1)^n}.$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 x^2\sin x^2dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y'+x\cdot y=2e^y,\ \ y(0)=0$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x)=\pi-\frac{x}{2}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 3.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+3}\right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin \frac{1}{n^3}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+2n+9}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n (x-3)^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x^2} \cdot \cos x \; dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' + 3x \cdot y^3 = x^3, \; y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = 1 + |x|$ в ряд Фурье в интервале $(-1, 1)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 4.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-2}{3n+1}\right)^n$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n^7+1}}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{7}{\sqrt[3]{n^4+2}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (2x+3)^n}{n^2+1}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2}\,dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' - x \cdot y = y^2, \ \ y(0) = 0,1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} x, & \text{при} \ -\pi < x \le 0 \\ 0, & \text{при} \ \ 0 < x < \pi \end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 5.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n!}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{\pi}{n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n+6n+7}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(2x-1)^n}{n^3}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} arctgx^2dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y'+x\cdot y^2=2\cos x,\ \ y(0)=1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x)=2x-1$ в ряд Фурье в интервале $(-2,2)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 6.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 - 3n + 8}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^3 + 7}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (3x+1)^n}{2^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{3}} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' - x^2 = y^2, \; y(0) = 0{,}1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{при } \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 7.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n^2+n+1)^n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(x-5)^{2n}}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^3}$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' - e^x y^2 = 0, \ \ y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = |1-x|$ в ряд Фурье в интервале $(-2, 2)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 8.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{2n}\right)^{n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{4^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^6}+n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{\sqrt{n^7}+1}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3+1}\cdot(2x+1)^n.$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y'-0,5y^2=\sin x,\ \ y(0)=1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x)=\begin{cases}1\ , & \text{при}\ \ -1\le x<0\\ 1-x\ , & \text{при}\ \ 0\le x<1\end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-1,1)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 9.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{2^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+3} \right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{(n-1)^3}}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-6}{6^n} \cdot (x-6)^n.$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} x \ln\left(1-x^2\right) dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' - e^{-x} y = 2x, \ \ y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = |x| - 1$ в ряд Фурье в интервале $(-1, 1)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 10.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n!}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{n+2}\right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^3}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n^7}+3}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} \sqrt{x}\cdot e^{-x}\,dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' - x\cdot y = 2x^2,\ \ y(0)=1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x^2+1$ в ряд Фурье в интервале $(-2, 2)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 11.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^n$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{n^3}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n-1}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{\ln(2n-1)}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' - 2x \cdot y = 3x^2 - 2x^4, \quad y(1) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 12.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{4^n} \cdot (2x+3)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' + x^2 y = y^3, \ \ y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = |x|$ в ряд Фурье в интервале $(-1,1)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 13.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(3n+1)}{(x+2)^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5}\frac{1}{1+x^4}dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$x\cdot y'-2y=2x^4,\ \ y(1)=0$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x)=x$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0,\ 1)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 14.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n-3}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{10}}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2n}}{\ln(4n+2)}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}\,dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y'+y\cdot\cos x=e^{\cos x},\ \ y(0)=0$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x)=x+\frac{\pi}{2}$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0,\ \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 15.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (n+1)!}{n^n}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{4n+3}\right)^{2n}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{2}{\sqrt{n^5}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-4}{4^n}(x-4)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2/4}dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' + 2y = e^x \cdot y^2, \ \ y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ в ряд Фурье по косинусам в интервале $(0, \ \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 16.

<u>**Задание 1.**</u> Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4+n^2}{4n^2+1}\right)^{n/2}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^{n-1}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n-1}$

<u>**Задание 2.**</u> Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+3)^n}{\sqrt[3]{n^4-2}}$$

<u>**Задание 3**</u>. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{2/3}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$$

<u>**Задание 4.**</u> Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y'+y=x\cdot y^2,\ \ y(0)=1$$

<u>**Задание 5.**</u> Разложить функцию $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0,\ \pi)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 17.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\sqrt{n}}{n+4}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cdot n!}{4^n}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+5}{3n^2} \right)^n$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^5 + 4n + 1}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^n (x-e)^n}{\ln(n-e)}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$x \cdot y' + y = -x^2 \cdot y^2, \;\; y(1) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - x$ в ряд Фурье по косинусам в интервале $(0, \;\pi)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 18.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2+1}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot n!}{n^n}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n^9}+6}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{(n^2+3)(x+3)^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cdot \cos x dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$x \cdot y' + y = y^2 \cdot \ln x, \quad y(1) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье по косинусам в интервале $(0,\ l)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 19.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+6}{3n}\right)^{n}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^{2}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^{2}(n+1)}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{2}}{2\cdot n!}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}-5}{5^{n}}(5x-1)^{n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^{3}\cdot \operatorname{arctg} x\, dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y'-y\cdot \operatorname{tg} x=\cos x,\ \ y(0)=1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x)=\pi-2x$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0,\ \pi)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 20.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^5+2n}{3+n^6}\right)^n$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{\ln n}}{n}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+2}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{7^{n+1}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{5^n}\cdot\left(\frac{x}{5}-1\right)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$x\cdot y'+y=y^2\cdot x,\ y(1)=1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x)=\pi-2x$ в ряд Фурье по косинусам в интервале $(0,\ \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 21.

<u>**Задание 1.**</u> Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{7^n}$

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\cdot \ln(n+3)}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$

<u>**Задание 2.**</u> Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-5}{5n^3+4}(7x+1)^n$$

<u>**Задание 3**</u>. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-0,4}^{0} \sin\frac{5x^2}{2}dx$$

<u>**Задание 4.**</u> Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = \cos x + y^2, \quad y(0) = 1$$

<u>**Задание 5.**</u> Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{при} \quad -\pi < x \le 0 \\ 0, & \text{при} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 22.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-2}{3n^3+1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{3}{6^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{\ln n}}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{4n^2+7n-10}(9x-1)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-0,25}^{0} \frac{\sin 2x}{x} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = e^x + y^2, \ y(0) = 0$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} x-\pi, & \text{при} \ -\pi \le x < 0 \\ -x-\pi, & \text{при} \ 0 < x \le \pi \end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 23.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+4}{2n^3-3}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-8)^n}{3^n}$

в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n+\ln^2 n)}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}(n-1)$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x)^{2n}10^n}{\ln(3n+1)}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = y + y^2,\ \ y(0)=3$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 24.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^2+1}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n^2-1)(x-2)^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-0,25}^{0} \cos\frac{4x^2}{3} dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = 2e^y + x \cdot y, \quad y(0) = 0$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{при} \quad -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{при} \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 25.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$

в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\frac{\pi}{n^2}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{8n^3-1}{8^n} \cdot (x-2)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-0,3}^{0} \cos\frac{10x^2}{3}\,dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = \sin x + y^2, \; y(0) = 1$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x^3$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 26.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+8}\right)^{2n^2}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^2\frac{1}{n}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(3n-4)}{2^n(x-4)^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-0,2}^{0}\frac{\ln(1-2x^3)}{x}dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = e^x + y,\ \ y(0) = 4$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x)=|x|$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 27.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n-1)}$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{n^2}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)(3x-1)^n}$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-0,2}^{0} e^{-5x^2}\,dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 2$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = x^2 + 1$ в ряд Фурье в интервале $(-2, 2)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 28.

<u>**Задание 1.**</u> Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$

б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$

<u>**Задание 2.**</u> Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{2^n\left(n^2+1\right)}\cdot\left(\frac{x}{2}+4\right)^n$$

<u>**Задание 3**</u>. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{0,16}e^{-\sqrt{x}}dx$$

<u>**Задание 4.**</u> Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$y' = \sin x + 0,5y^2,\ \ y(0)=1$

<u>**Задание 5.**</u> Разложить функцию $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad -\pi < x < 0\\ x, & \text{при} \quad 0 \le x < \pi\end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$.

Контрольная работа №10.

Вариант 29.

__Задание 1.__ Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{3^n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

__Задание 2.__ Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n (n-1)(x-1)^n}$$

__Задание 3__. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-1}^{0} \sin\frac{x^2}{5}\,dx$$

__Задание 4.__ Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' = 2e^y + x\cdot y,\ \ y(0) = -1$$

__Задание 5.__ Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье в интервале $(-2\pi, 2\pi)$.

Контрольная работа №10.
Вариант 30.

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n+1}{3n+1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{n^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(1+\ln n)}$

г) $\sum_{n=8}^{\infty}\operatorname{arctg}^3\frac{2}{n-7}$

Задание 2. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt[3]{n}}\cdot\left(\frac{x}{3}-3\right)^n$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_{-0,5}^{0}\operatorname{arctg}x^3\,dx$$

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y'=x+x^2+y^2,\ \ y(0)=5$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x)=\begin{cases}2, & \text{при } -\pi<x<0\\ 1, & \text{при } 0\le x<\pi\end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$.